

Шәкір Айдос



Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

3-дәріс. Интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есеп. Шешімнің бар болуы

Дәрістің мақсаты – интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің шешімінің бар болуын көрсету

Негізгі сұрақтар:

1. Интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің әлсіз қойылымы
2. Интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есепке эквивалентті локалды емес тура есеп
3. Локалды емес тура есептің әлсіз шешімінің бар болуы
4. Локалды емес тура есептің әлді шешімінің бар болуы

Бұл дәрісте интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есеп қарастырылады. Қарастырылып отырған кері есептің уақыт бойынша локалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы зерттеледі.

1 Сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есеп

1.1 Есептің қойылымы

Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ шенелген облыс және оның $\partial\Omega$ жатық шекарасы болсын. $\Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T]$ бүйір бетімен анықталған $Q_T = \Omega \times [0, T], T > 0$ цилиндрінде $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t), f(t))$ функциялар үштігін анықтауға арналған, сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтықтардың ағынын сипаттайтын

$$\mathbf{u}_t - \kappa \Delta \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \int_0^t K(t-s) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds - \nabla p = f(t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad (1.1)$$

интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесін,

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T \quad (1.2)$$

сығылмайтын сұйықтық теңдеуін,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.3)$$

бастапқы шартын,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T \quad (1.4)$$

сырғанау шекаралық шартын және

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \boldsymbol{\omega} d\mathbf{x} = e(t), \quad t \in [0, T] \quad (1.5)$$

қосымша шартты қанағаттандыратын кері есепті қарастырайық, мұндағы $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ – сұйықтың жылдамдығы мен $p(\mathbf{x}, t)$ – сұйықтың қысымы, ал ν және κ оң сандары, сәйкесінше, сұйықтың кинематикалық тұтқырлық және релаксациясының коэффициенттері, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) := f(t)\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ вектор функциясы сыртқы күштердің тығыздығын, ал $f(t)$ сыртқы күштердің интенсивтілігін сипаттайды. Сондай-ақ, $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$, $e(t)$, $K(t)$ белгілі функциялар.

Анықтама 1.1. (1.1)-(1.5) кері есебінің әлсіз шешімі деп

1. $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V})$, $\mathbf{u}_t \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V})$, $f(t) \in L^2[0, T]$;
2. Ω –да барлық дерлік жерде $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ бастапқы шартты;
3. Кез келген $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}$ және барлық $t \in (0, T)$ үшін төмендегі интегралдық тепе-теңдікті

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left((\mathbf{u}(t), \boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega} + \kappa (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega} \right) + \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega} = \\ & f(t) (\mathbf{g}(t), \boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega} - ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega} - \\ & \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega} ds. \end{aligned} \quad (1.6)$$

қанағаттандыратын $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), f(t))$ функциялар жұбын атайды.

Анықтама 1.2. (1.1)-(1.5) кері есебінің әлді шешімі деп

1. $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega)) \cap \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega))$, $\mathbf{u}_t \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega))$, $f(t) \in L^2[0, T]$;
2. әрбір теңдеуді сәйкес облыстарда барлық дерлік жерде қанағаттандыратын

$(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), f(t))$ функциялар жұбын атайды.

Ескерту 1.1. Әдеттегідей, әлсіз шешімінің анықтамасында p қысым туралы мағлұмат келтірілмеген. Оны [1] мақаладағыдай $\mathbf{u}$ және f функциялары белгілі болғаннан кейін де Рамм леммасын қолданып, (1.2) теңдеуден бірімәнді қалпына келтіруге болады.

Кері есепті эквивалентті локалды емес тура есепке келтіру

Айталық, есептердің берілгендері келесі шарттарды қанағаттандырсын дейік.

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}; \quad (1.7)$$

$$\exists k_0 \in \mathbb{R} : 0 < k_0 < \infty, \quad |g_0(t)| = |(\mathbf{g}(t), \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega}| \geq k_0 > 0, \quad \forall t \geq 0; \quad (1.8)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)); \quad (1.9)$$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}, \quad e(t) \in W_2^1([0, T]); \quad (1.10)$$

$$(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} = e(0); \quad (1.11)$$

$$K(t) \in L^2([0, T]) : \quad \|K(t)\|_{L^2([0, T])} \equiv K_0 < \infty. \quad (1.12)$$

Енді (1.1) теңдеуді $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ функциясына көбейтіп және Ω облыс бойынша интегралдайық. Алынған өрнекті бөліктеп интегралдап, сондай-ақ (1.5) қосымша және (1.8) шартты қолдансақ, онда $f(t)$ функциясы келесі түрде анықталады

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{1}{g_0(t)} & \left(e'(t) + \kappa (\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} - \right. \\ & \left. ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} + \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} ds \right) := F_1(\mathbf{u}, t). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Мұнан соң, (1.13) өрнекті (1.1) теңдеуге қойғансақ, онда белгісіз $\mathbf{u}$ және p функцияларын табуға арналған

$$\mathbf{u}_t - \kappa \Delta \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \int_0^t K(t-s) \Delta \mathbf{u}(s) ds - \nabla p = \quad (1.14)$$

$$F_1(\mathbf{u}, t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T,$$

теңдеулер жүйесін, (1.3) бастапқы және (1.4) шекаралық шарттарды қанағаттандыратын локалды емес тура есеп алынады, мұндағы $F_1(\mathbf{u}, t) = f(t)$ функциясы (1.13) өрнекпен анықталады. Демек, (1.1)-(1.5) кері есебін, сәйкесінше, (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есепке алып келдік.

Кері есеп пен локалды емес тура есептің эквиваленттілігі жөнінде келесі лемма орынды.

Лемма 1.1. Айталық, (1.8)-(1.11) шарттар орындалсын. Демек, (1.1)-(1.5) кері есебі (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебіне эквивалентті, яғни $(\mathbf{u}, p, f)$ функциялары (1.1)-(1.5) кері есебінің шешімі болса, онда $(\mathbf{u}, p)$ жұбы (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебінің шешімі болып табылады және керісінше, $(\mathbf{u}, p)$ функциялары (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебінің шешімі болса, онда ол (1.13) өрнекпен анықталған $f(t)$ функциясымен бірге (1.1)-(1.5) кері есебінің шешімін береді.

Ескерту 1.2. (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебінің әлсіз және әлді шешімінің анықтамасы 1.1 және 1.2-анықтамаға ұқсас түрде беріледі.

Дәлелдеуі 1.1. Шын мәнінде, лемманың дәлелдеуінің бірінші бөлігі (1.1)-(1.2) теңдеулер жүйесінен (1.14) теңдеуді алуда дәлелденді.

Енді екінші бөлігін дәлелдейік. Айталық, $(\mathbf{u}, p)$ функциялар жұбы (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебінің шешімі болсын. Екінші жағынан, $(\mathbf{u}, p)$ функциялар жұбы (1.13) өрнегімен анықталған $f(t)$ функциясымен бірге (1.1)-(1.4) өрнектерді қанағаттандырады. Олай болса, $(\mathbf{u}, p, f)$ функциялары (1.1)-(1.5) кері есебінің шешімі екенін дәлелдеу үшін (1.5) қосымша шарттың орынды екенін көрсету жеткілікті.

Кері жорып, яғни (1.5) қосымша шарт орындалмасын деп ұйғарайық, яғни

$$(\mathbf{u}(t), \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} = e_1(t), \quad t \in [0, T] \quad (1.15)$$

болсын, мұндағы $t \geq 0$ үшін $e_1(t) \neq e(t)$. Шешімнің анықтамасы мен (1.10), (1.15) шарттардан $e_1(t) \in W_2^1([0, T])$ орындалады, сонымен қатар (1.11) үйлесімділік шарттарынан төмендегі нәтиже қорытылады

$$e_1(0) = (\mathbf{u}(0), \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} = e(0).$$

Енді (1.14) өрнекке $\boldsymbol{\omega}$ функциясын көбейтіп және бөліктеп интегралдау өрнегін қолданып, сонымен бірге (1.15) шартты ескерсек, онда

$$\begin{aligned} e_1'(t) + \kappa (\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \\ \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} ds = \frac{1}{g_0(t)} \left(e'(t) + \kappa (\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \right. \\ \left. \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} ds \right) (\mathbf{g}, \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} \end{aligned} \quad (1.16)$$

теңдігі шығады, сондай-ақ (1.8) шарттан $E(t) = e_1(t) - e(t)$ функциясы үшін келесі Коши есебі алынады

$$\begin{cases} E'(t) = 0, \\ E(0) = e_1(0) - e(0) = 0, \end{cases} \quad (1.17)$$

және одан $t \geq 0$ үшін $e_1(t) \equiv e(t)$ тұжырымдалады.

1.2 Кері есептің әлсіз шешімінің бар болуы

Алдағы уақытта 1.1-лемма бойынша (1.1)-(1.5) кері есебінің орнына (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебінің шешімділігі зерттелінеді.

Теорема 1.1. Айталық, (1.7)-(1.12) шарттар орындалсын және қандай да бір m оң саны табылып келесі шарт орындалсын

$$\frac{\varkappa}{k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2, \Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq m < 2. \quad (1.1)$$

Онда ақырлы $T_1 \in (0, T]$ уақыты табылып, (1.14), (1.3)-(1.4) тура есебінің Q_{T_1} цилиндрінде кемінде бір әлсіз шешімі табылады, мұндағы T_1 мәні төменде (1.18) өрнекпен анықталады. Сондай-ақ, әлсіз шешім келесі априорлық бағалауды қанағаттандырады

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty(0, T_1; \mathbf{L}^2(\Omega) \cap \mathbf{V})}^2 + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(0, T_1; \mathbf{V})}^2 + \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2(0, T_1; \mathbf{L}^2(\Omega) \cap \mathbf{V})}^2 \leq C, \quad (1.2)$$

мұндағы C есептің берілгендерінен тәуелді тұрақты.

Ескерту 1.3. 1.1-теоремадағы (1.1) шарт (1.5) қосымша шартқа қатысты бағалаулар алу кезінде пайда болды.

Дәлелдеуі 1.2. Теореманы дәлелдеу үшін Фаэдо-Галеркин әдісі қолданылады: ең алдымен жуық шешімдер құрылып, оған бағалаулар алынады және шекке көшу дәлелденеді.

Галеркиндік жуықтау. Айталық, $\{\boldsymbol{\varphi}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ функциялары $\mathbf{H}$ кеңістігінің элементтерінен құралған, $\mathbf{L}^2(\Omega)$ кеңістігінде ортогональ және сызықтық комбинациялары $\mathbf{V}$ кеңістігінде барлық жерде тығыз жүйе болсын. Өлшемі n -ге ($n \in \mathbb{N}$) тең және $\boldsymbol{\varphi}_k$, $k = 1, \dots, n$ жүйесінің сызықтық комбинациясынан тұратын $\mathbf{X}^n$ кеңістігін қарастырайық. Кез келген $n \in \mathbb{N}$ үшін (1.1)-(1.4), (1.13) есептің жуық шешімі келесі түрде ізделінеді

$$\mathbf{u}^n(x, t) = \sum_{j=1}^n c_j^n(t) \boldsymbol{\varphi}_j(x), \quad \boldsymbol{\varphi}_j \in \mathbf{X}^n, \quad (1.3)$$

мұндағы $c_j^n(t)$, $j = 1, \dots, n$ коэффициенттері белгісіз және төмендегі жай дифференциалдық теңдеулер (ЖДТ) жүйесінің шешімі болып табылады

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left((\mathbf{u}^n(t), \boldsymbol{\varphi}_k)_{2, \Omega} + \varkappa (\nabla \mathbf{u}^n(t), \nabla \boldsymbol{\varphi}_k)_{2, \Omega} \right) + \nu (\nabla \mathbf{u}^n(t), \nabla \boldsymbol{\varphi}_k)_{2, \Omega} - \\ & ((\mathbf{u}^n(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\varphi}_k, \mathbf{u}^n(t))_{2, \Omega} = - \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \boldsymbol{\varphi}_k)_{2, \Omega} ds + \\ & F_1(\mathbf{u}^n, t) (\mathbf{g}(t), \boldsymbol{\varphi}_k)_{2, \Omega}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

мұндағы $k = 1, 2, \dots, n$ және

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{u}^n, t) = & \frac{1}{g_0} \left(e'(t) + \varkappa (\nabla \mathbf{u}_t^n(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2, \Omega} + \nu (\nabla \mathbf{u}^n(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2, \Omega} - \right. \\ & \left. ((\mathbf{u}^n(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}^n(t))_{2, \Omega} + \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2, \Omega} ds \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Енді (1.4) ЖДТ жүйесін келесі бастапқы шарттармен толықтырайық

$$\mathbf{u}^n(0) = \mathbf{u}_0^n, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.6)$$

мұндағы

$$\mathbf{u}_0^n = \sum_{j=1}^n (\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\varphi}_j)_{2,\Omega} \boldsymbol{\varphi}_j$$

функциясы $\mathbf{L}^2(\Omega) \cap \mathbf{V}$ кеңістігіндегі функционалдық тізбек болып табылады және

$$\mathbf{u}_0^n(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \text{ әлді жинақты } \mathbf{L}^2(\Omega) \cap \mathbf{V} \text{-де } n \rightarrow \infty. \quad (1.7)$$

Жай дифференциалдық теңдеулер теориясы бойынша (1.4)-(1.6) Коши есебінің $[0, t_0]$ аралығында $c_j^n(t)$ шешімі локалды бар болады. Төменде, априорлық бағалаулар арқылы Коши есебінің шешімін $[0, T_0] \subset [0, T]$ кеңейтуге болатынын көруге болады, мұндағы $[0, T_0]$ – априорлық бағалаулар орынды болатын максималды аралық.

Априорлық бағалаулар. (1.4) жүйесінің k -теңдеуін $c_k^n(t)$ және $\frac{dc_k^n(t)}{dt}$ көбейтіп, k бойынша 1-ден n -ге шейін қосындыласақ, сәйкесінше, келесі теңдіктер алынады

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right) + \nu \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = \\ & - \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} ds + F_1(\mathbf{u}^n, t) (\mathbf{g}, \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = \\ & ((\mathbf{u}^n(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}_t^n(t), \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} - \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}_t^n(t))_{2,\Omega} ds + \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$F_1(\mathbf{u}^n, t) (\mathbf{g}(t), \mathbf{u}_t^n(t))_{2,\Omega}.$$

Жоғарыдағы (1.8) және (1.9) теңдіктерді біріктерсек, онда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right) + \nu \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \\ & \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = - \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} ds - \\ & \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}_t^n(t))_{2,\Omega} ds + F_1(\mathbf{u}^n, t) (\mathbf{g}(t), \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} + \\ & F_1(\mathbf{u}^n, t) (\mathbf{g}(t), \mathbf{u}_t^n(t))_{2,\Omega} + ((\mathbf{u}^n(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}_t^n(t), \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} := \sum_{i=1}^5 I_i. \end{aligned} \quad (1.10)$$

өрнегі алынады. Соңғы (1.10) өрнектің оң жағына Гельдер және Юнг теңсіздіктерін қолданып келесідей бағалайық

$$|I_1| \leq \frac{\nu}{2} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{K_0^2}{2\nu} \int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds; \quad (1.11)$$

$$|I_2| \leq \frac{\varepsilon_1}{4} \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{K_0^2}{\varepsilon_1} \int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds; \quad (1.12)$$

$$|I_3| \leq |F_1| \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega} \leq \frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}}{k_0}.$$

$$\left[|e'(t)| + \varkappa \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}} \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}} + \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}} \left(\nu \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{4,\Omega}^2 + K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right] \leq \left(\frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_3}{2} \right) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \quad (1.13)$$

$$\frac{\varkappa^2}{2\varepsilon_2 k_0^2} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2}{2\varepsilon_3 k_0^2} \left[|e'(t)|^2 + \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \times \left(\nu^2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + C^2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^4 + K_0^2 \int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right) \right],$$

$$|I_4| \leq \left(\frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_3}{2} \right) \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\varkappa^2}{2\varepsilon_2 k_0^2} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2}{2\varepsilon_3 k_0^2} \left[|e'(t)|^2 + \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \left(C^2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^4 + \nu^2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + K_0^2 \int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right) \right], \quad (1.14)$$

$$|I_5| \leq \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{4,\Omega}^2 \leq \frac{\varepsilon_1}{4} \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{C^2(\Omega)}{\varepsilon_1} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^4. \quad (1.15)$$

Осылайша, алынған (1.11)-(1.15) теңсіздіктерді (1.10) өрнектің оң жағына қойғанда келесі дифференциалдық теңсіздік шығады

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right) + \nu \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \\ & \alpha \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \beta \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \\ & C_1 \int_0^t \left(1 + \|\mathbf{u}^n(s)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 \right) ds + \\ & C_2 \left(1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right)^2 + \\ & C_3 \left(1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right) + C_4(t), \end{aligned} \quad (1.16)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} \alpha &:= 2 \left(1 - \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2} \right); \quad \beta := 2 \left(\varkappa - \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{\varkappa^3}{\varepsilon_2 k_0^2} \sup_{t \in [0,T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \right); \\ C_1 &:= \frac{1}{\nu + \varkappa} \left(\frac{K_0^2}{\nu} + \frac{2K_0^2}{\varepsilon_1} + \frac{2K_0^2}{\varepsilon_3 k_0^2} \sup_{t \in [0,T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \right); \\ C_2 &:= \frac{2C^2}{(\nu + \varkappa)^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3 k_0^2} \sup_{t \in [0,T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \right); \end{aligned}$$

$$C_3 := \frac{1}{\nu + \varkappa} \left(\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \frac{2\nu^2}{\varepsilon_3 k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2, \Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \right);$$

$$C_4(t) := \frac{2}{\varepsilon_3 k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2, \Omega}^2 |e'(t)|^2.$$

Енді $\varepsilon_2 = \frac{2e^\varepsilon - 1}{e^\varepsilon}$; $\varepsilon_3 = \frac{\sin \varepsilon}{e^\varepsilon}$; $\varepsilon \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ таңдасақ және ε_1 -дің сәйкес мәні үшін $\frac{\varkappa}{k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2, \Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq m < 2$ теңсіздігінің жоғарғы шекарасын m -нен 2-ге дейін кеңейтуге болады. Алайда, ε_1 саны $m > 2$ болатындай таңдалмауы керек, себебі $\alpha > 0$ болғандығынан $\varepsilon_2 < 2$.

Енді (1.16) өрнекті s бойынша 0-ден t -ға шейін интегралдап, (1.7) өрнекті қолдансақ, келесі интегралдық теңсіздікке келеміз

$$\begin{aligned} z(t) + \nu \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(0, T; \mathbf{V})}^2 + \alpha \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(Q_T)}^2 + \beta \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(0, T; \mathbf{V})}^2 \leq \\ C_5 \int_0^t z^2(s) ds + C_6, \end{aligned} \quad (1.17)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} z(t) &:= 1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2, \Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2; \\ C_5 &= \max \{C_1 T + C_3; C_2\}; \quad C_6 = \|\mathbf{u}_0\|_{2, \Omega}^2 + (\varkappa + \nu) \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{V}}^2 + \int_0^t C_4(s) ds. \end{aligned}$$

Әрі қарай $z(t)$ функциясы үшін сызықтық емес Гронуолл теңсіздігін қолданғанда (1.17) өрнектен

$$0 \leq t \leq T_1 < T_* := \frac{1}{C_5 C_6}. \quad (1.18)$$

уақыт аралығы үшін келесі бағалау орынды

$$z(t) \leq \frac{C_6}{1 - C_5 C_6 t} \equiv K_1 < \infty. \quad (1.19)$$

Демек, кез келген $t \leq T_1 < T_*$ үшін (1.19) өрнектен келесі бағалау орынды екенін көруге болады

$$\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2, \Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leq K_1. \quad (1.20)$$

(1.20) бағалауды (1.17) өрнектің оң жағына қолданып және $t \in [0, T_1]$ бойынша супремум алғанда келесі априорлық бағалау тұжырымдалады

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T_1]} \left(\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2, \Omega}^2 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right) + \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(0, T_1; \mathbf{V})}^2 + \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(Q_{T_1})}^2 + \\ \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(0, T_1; \mathbf{V})}^2 \leq C := C(\nu, \varkappa, \alpha, \beta, T_1, K_1, C_5, C_6). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Шектік көшу. Жоғарыдағы (1.3) өрнекпен анықталған $\mathbf{u}^n$ жуық шешімі (1.2) априорлық бағалауды қанағаттандырады. Бұдан $\mathbf{u}^n$ тізбегінің $\mathbf{u}^{n_k}$ іштізбегі табылып, ол келесі $*$ -әлсіз және әлсіз жинақтылықтардың орынды екенін көруге болады. Ескерер жәйт, шектік көшуді дәлелдеуде ыңғайлылық үшін

$\mathbf{u}^{n_k}$ іштізбегін $\mathbf{u}^n$ арқылы белгілеуі қолданылады.

$$\mathbf{u}^n \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{әлсіз жинақты } L^2(0, T_1; \mathbf{V})\text{-де} \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.22)$$

$$\mathbf{u}^n \rightharpoonup \mathbf{u} \quad * \text{—әлсіз жинақты } L^\infty(0, T_1; \mathbf{V})\text{-де}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.23)$$

$$\mathbf{u}_t^n \rightharpoonup \mathbf{u}_t \quad \text{әлсіз жинақты } L^2(0, T_1; \mathbf{V})\text{-де}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.24)$$

Сонымен қатар, (1.2) априорлық бағалаудан келесі тұжырымдар орынды

$$\mathbf{u}^n \text{ тізбегі } L^2(0, T_1; \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega))\text{-де бірқалыпты шенелген}, \quad (1.25)$$

$$\mathbf{u}_t^n \text{ тізбегі } \mathbf{L}^2(Q_{T_1})\text{-де бірқалыпты шенелген}. \quad (1.26)$$

Сонымен бірге, $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ компактiлi енгiзуi және Обэн-Лионс леммасын бойынша келесі әлді жинақтылық шығады

$$\mathbf{u}^n \longrightarrow \mathbf{u} \quad \text{әлді жинақты } L^2(0, T_1; \mathbf{L}^2(\Omega))\text{-де}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.27)$$

Айталық, $\zeta(t) \in C_0^\infty([0, T_1])$ болсын. (1.4) өрнекті $\zeta(t)$ функцияға көбейтіп, 0 мен T_1 аралығында интегралдасақ, онда төмендегі өрнек орынды

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{T_1}} \mathbf{u}_t^n \cdot \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x} dt + \varkappa \int_0^{T_1} (\nabla \mathbf{u}_t^n, \nabla \boldsymbol{\varphi}_k \zeta)_{2,\Omega} \, dt + \int_{Q_{T_1}} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \cdot \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x} dt + \\ & \nu \int_0^{T_1} (\nabla \mathbf{u}^n, \nabla \boldsymbol{\varphi}_k \zeta)_{2,\Omega} \, dt = \int_0^{T_1} \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \boldsymbol{\varphi}_k \zeta)_{2,\Omega} \, ds dt + \\ & \int_0^{T_1} F_1(\mathbf{u}^n, t) \int_\Omega \mathbf{g} \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x} \, dt, \quad k \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Сондай-ақ, k -ны бекітіп және (1.22)-(1.27) нәтижелерді қолданып, (1.28) өрнектен $n \rightarrow \infty$ шекке көшсек, онда төмендегі өрнек тұжырымдалады

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{T_1}} \mathbf{u}_t \cdot \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x} dt + \varkappa \int_0^{T_1} (\nabla \mathbf{u}_t, \nabla \boldsymbol{\varphi}_k \zeta)_{2,\Omega} \, dt + \int_{Q_{T_1}} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x} dt + \\ & \nu \int_0^{T_1} (\nabla \mathbf{u}, \nabla \boldsymbol{\varphi}_k \zeta)_{2,\Omega} \, dt = \int_0^{T_1} \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\varphi}_k \zeta)_{2,\Omega} \, ds dt + \\ & \int_0^{T_1} F_1(\mathbf{u}, t) \int_\Omega \mathbf{g} \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x} \, dt, \quad k \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Соңғы теңдіктегі конвективті мүше үшін келесі шектік көшуді орынды

$$(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \rightharpoonup (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad \text{әлсіз жинақты } \mathbf{L}^2(Q_{T_1})\text{-де}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.30)$$

Шын мәнінде, (1.30) өрнекті интеграл арқылы жазсақ, онда төмендегі түрде болады

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{T_1}} [(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \, d\mathbf{x} dt = \\ & \int_{Q_{T_1}} [(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}) \cdot \nabla] \mathbf{u}^n \, d\mathbf{x} dt - \int_{Q_{T_1}} (\mathbf{u} \cdot \nabla) (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} dt, \end{aligned}$$

бұл өрнекке Гелдер теңсіздігін (1.2) мен (1.27) өрнектерімен бірге қолданғанда оң жағындағы бірінші интегралдың мәні нөлге жинақтылатынын аңғаруға болады:

$$\int_{Q_{T_1}} [(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}) \cdot \nabla] \mathbf{u}^n d\mathbf{x}dt \leq \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(Q_{T_1})} \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{L}^2(0, T_1; \mathbf{V})} \leq \sqrt{C} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(Q_{T_1})} \longrightarrow 0, \quad \text{егер } n \rightarrow \infty.$$

Ал, (1.22) өрнек пен $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(Q_{T_1})$ әсерінен екінші интеграл нөлге барады. Аналогты түрде локалды емес мүше үшін де келесі шектік көшу орынды

$$\begin{aligned} \int_0^{T_1} F_1(\mathbf{u}^n, t) \int_{\Omega} \mathbf{g} \varphi_k \zeta d\mathbf{x}dt &= \int_0^{T_1} \frac{1}{g_0(t)} \left[e'(t) + \kappa (\nabla \mathbf{u}_t^n, \nabla \boldsymbol{\omega})_{2, \Omega} + \nu (\nabla \mathbf{u}^n, \nabla \boldsymbol{\omega})_{2, \Omega} - \right. \\ &\quad \left. ((\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}^n)_{2, \Omega} + \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2, \Omega} ds \right] \int_{\Omega} \mathbf{g} \varphi_k \zeta d\mathbf{x}dt \rightharpoonup \\ &\quad \int_0^{T_1} F(\mathbf{u}, t) \int_{\Omega} \mathbf{g} \varphi_k \zeta d\mathbf{x}dt \text{ жинақты } L^2([0, T_1])\text{-де, } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Соңғы өрнекте екінші мүше (1.24) өрнектің, үшінші мүше (1.22) өрнектің, бесінші мүше (1.23) өрнектің әсерінен жинақты. Сондай-ақ, бірінші мүше тривиалды түрде, ал төртінші мүше (1.30) өрнектің әсерінен жинақты. (1.29) теңдеу сызықты болғандықтан кез келген $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ функцияларының ақырлы сызықтық комбинациясы мен $\zeta \in C_0^\infty([0, T_1])$ шартын қанағаттандыратын $\varphi \zeta \in \mathbf{L}^2(0, T_1; \mathbf{V})$ функциясы үшін де орынды болып қалады. Мұнымен қоса, (1.29) өрнектегі $[0, T_1]$ аралығындағы интеграл астындағы барлық қосылғыштар t айнымалысы бойынша үзіліссіз функция болып табылады. Демек, барлық дерлік $t \in [0, T_1]$ және $\varphi \in \mathcal{V}$ үшін келесі интегралдық теңдік алынды

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} [\mathbf{u}_t(t) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(t)] \varphi d\mathbf{x} + \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \varphi)_{2, \Omega} + \\ &\quad \kappa (\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \varphi)_{2, \Omega} = \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \varphi)_{2, \Omega} ds + \\ &\quad F_1(\mathbf{u}, t) \int_{\Omega} \mathbf{g}(t) \varphi d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

1.1-Теореманың дәлелдеуі аяқталды.

1.3 Кері есептің әлді шешімінің бар болуы

Бұл бөлімшеде қарастырылып отырған кері есептің әлді шешімінің бар болуы зерттелінеді.

Теорема 1.2. Айталық, 1.1-теореманың шарттары орындалсын. Мұнымен қоса, бастапқы функция үшін келесі шарт орынды болсын

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega). \tag{1.1}$$

Олай болса, (1.14), (1.3)-(1.4) тура есебінің Q_{T_1} цилиндрінде кемінде бір әлді шешімі бар болады және ол (1.2) бағалауға қоса

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty(0,T_1;\mathbf{V}\cap\mathbf{H}^2(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2(0,T_1;\mathbf{V}\cap\mathbf{H}^2(\Omega))}^2 \leq C < \infty. \quad (1.2)$$

бағалау орынды болады, мұндағы T_1 мәні (1.18) өрнектен белгілі және C есептің берілгендерінен тәуелді тұрақты.

Дәлелдеуі 1.3. Жалпылама әлді шешімнің бар болуын дәлелдеу үшін арнайы базис, нақтырақ айтқанда, (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есеп үшін

$$\tilde{\Delta}\varphi_k := -\mathbb{P}\Delta\varphi_k = \lambda_k \varphi_k, \quad \varphi_k(x) \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega) \quad (1.3)$$

түрінде Стокс операторы үшін қойылған спектралды есептің меншікті функциялары қолданылады, мұндағы $\mathbb{P} : \mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}(\Omega)$ Лере проекциясы. Сондай-ақ, $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ жүйесі $\mathbf{H}$ кеңістігінде ортогональ және $\mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған жүйені құрайды[2], [3].

Олай болса, әлсіз шешім үшін алынған барлық априорлық бағалаулар әлді шешімге де орынды. 1.2-теореманы толық дәлелдеу үшін $\Delta\mathbf{u}^n$ мен $\Delta\mathbf{u}_t^n$ -ға априорлық бағалаулар алсақ жеткілікті.

Сөйтіп, (1.4) өрнекті $\lambda_k \frac{dc_k^n(t)}{dt}$ -ға көбейтіп, k бойынша 1-ден n -ге шейін қосындыласақ, онда келесі өрнек шығады

$$\begin{aligned} & \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \left\| \tilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \left\| \tilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{\mathbf{V}}^2 = \\ & - \left((\mathbf{u}^n(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}^n(t), \tilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t) \right) - \int_0^t K(t-s) \left(\tilde{\Delta}\mathbf{u}^n(s), \tilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t) \right)_{2,\Omega} ds + \\ & F_1(\mathbf{u}^n, t) \left(\mathbf{g}, -\tilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t) \right)_{2,\Omega} \equiv I_6, \end{aligned} \quad (1.4)$$

мұндағы $F(\mathbf{u}^n, t)$ функциясы (1.5) өрнегімен анықталады және төмендегі бағалауды қанағаттандырады

$$\begin{aligned} |F_1|^2 \leq & \frac{5}{k_0^2} \left[|e'(t)|^2 + \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \left(\varkappa^2 \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \nu^2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. C^4(\Omega) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^4 + K_0^2 \int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Гельдер мен Юнг теңсіздіктерін және (1.5) бағалауды бірге қолданып, I_6 -ті бағалайық

$$\begin{aligned} |I_6| \leq & \frac{\varkappa}{2} \left\| \tilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{3}{2\varkappa} \left[C \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \left\| \tilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \right. \\ & \left. K_0^2 \int_0^t \left\| \tilde{\Delta}\mathbf{u}^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds + |F_1|^2 \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

(1.6) бағалауды (1.4) теңдікке ескергенде, келесі теңсіздік қорытылады

$$\begin{aligned} \nu \frac{d}{dt} \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \frac{3}{\varkappa} \left[C \left\| \mathbf{u}^n(t) \right\|_{\mathbf{V}}^2 \right. \\ \left. \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + K_0^2 \int_0^t \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds + |F_1|^2 \left\| \mathbf{g}(t) \right\|_{2,\Omega}^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Енді (1.7) өрнекті s бойынша 0 -ден t -ға шейін интегралдап және әлсіз шешім үшін алынған априорлық бағалауларды қолдансақ, төмендегі интегралдық теңсіздік алынады

$$\nu \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \int_0^t \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds \leq C_8 + C_9 \int_0^t \nu \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds, \quad (1.8)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} C_8 &:= \nu \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_0 \right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{3}{\varkappa} \left\| \mathbf{g} \right\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}^2 \int_0^{T_1} |F_1(s)|^2 ds < \infty, \\ C_9 &:= \frac{3}{\nu \varkappa} \left(C(\Omega) \sup_{t \in [0,T_1]} \left\| \mathbf{u}^n(t) \right\|_{\mathbf{V}}^2 + K_0^2 T \right) < \infty. \end{aligned}$$

Мұнан кейін, (1.8) өрнекке Гронуолл леммасын қолданғанда,

$$\left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{1}{\nu} C_8 e^{C_9 T_1}, \quad \forall t \in (0, T_1) \quad (1.9)$$

бағалауы қорытылады. Егер (1.8) өрнектің екі жағынан $t \in [0, T_1]$ бойынша супремум алып және (1.9) бағалауды қолдансақ, онда төмендегі бағалау тұжырымдалады

$$\sup_{t \in [0, T_1]} \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n \right\|_{\mathbf{L}^2(Q_{T_1})}^2 \leq C := C(\nu, \varkappa, C_8, C_9, T_1) < \infty. \quad (1.10)$$

Список литературы

- [1] S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Kh. Khompysh. The classical Kelvin-Voigt problem for nonhomogeneous and incompressible fluids: existence, uniqueness and regularity. Nonlinearity 34 (2021), no. 5, 3083–3111. [1.1](#)
- [2] O.A. Ladyzhenskaya, On the global unique solvability of some two-dimensional problems for the water solutions of polymers, Journal of Mathematical Sciences. 99 (2000) 888–897. [1.3](#)
- [3] O.A. Ladyzhenskaya, The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow II, Nauka, Moscow, 1970. [1.3](#)